Kontinuummekanik

VIII - materialemodeller

Rathkjen, Arne

Publication date:
2000

Document Version
Også kaldet Forlagets PDF

Aalborg **UNIVERSITET**

Kontinuumm

Kontinuummekanik VIII - Materialemodeller

Arne Rathkjen

Instituttet for Bygningsteknik, Aalborg Universitet
Team 2000.1
ISSN 1395-7953 R0031

A. RATHKJEN

TEAM

KONTINUUMMEKANIK

2000.1

VIII - MATERIALEMODELLER

DECEMBER 2000

ISSN 1395-7953 R0031

VIII MATERIALEMODELLER

Konstitutive ligninger beskriver *ideale* materialer, som kun til en vis grad repræsenterer virkelige materialer. Kun de vigtigste parametre indgår i beskrivelsen, og kun indenfor et forholdsvis snævert parameterinterval kan man forvente en rimelig god beskrivelse af virkelige konstruktionsmaterialer.

Ideale materialer antages sammensat af elastiske elementer og dissipative elementer. De rent elastiske elementer og de rent dissipative elementer behandles i afsnit 30 henholdsvis afsnit 31. Emnerne for afsnit 32 og 33 er herefter modeller for de sammensatte viskoelastiske og elastoplastiske materialer.

30. ELASTISKE MATERIALEELEMENTER

Elastiske materialer defineres som i det endimensionale tilfælde ved:

- de aktuelle tilstandsparametre er massetætheden ρ, tøjningstensoren $\underset{\sim}{\varepsilon}$, spændingstensoren $\underset{\sim}{\sigma}$, den relative temperaturdifferens θ og varmefylden c,
- de mekaniske parametre og de termiske parametre kan variere uafhængigt af hinanden,
- der eksisterer to tilstandsligninger så to parametre kan elimineres og den specifikke indre energi kan udtrykkes ved en mekanisk og en termisk parameter.

Med tøjningsenergifunktionen $u = w(\underset{\sim}{\varepsilon}, \theta)$ som funktion af tøjningstensoren $\underset{\sim}{\varepsilon}$ og den relative temperaturdifferens θ finder man som i afsnit 24.1

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\sigma} &= \rho \partial w / \partial \underset{\sim}{\varepsilon} \\ c &= \partial w / \partial \theta \end{aligned} \tag{30.1}$$

Benytter man referencekonfigurationen i stedet for den aktuelle konfiguration har man

$$\dot{U} = \int_V \rho_0 \dot{u} dV \tag{30.2}$$

i stedet for $\dot{U} = \int_v \rho \dot{u} dv$, og med tøjningsenergifunktionen $u = W(\underset{\sim}{F}^T, \theta)$ som en funktion af deformationsgradienten $\underset{\sim}{F}^T$ og den relative temperaturdifferens θ, får man

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\Sigma} &= \rho_0 \partial W / \partial \underset{\sim}{F}^T \\ c &= \partial W / \partial \theta \end{aligned} \tag{30.3}$$

som udtrykker den første Piola-Kirchhoff spændingstensor ved deformationsgradienttensoren $\underset{\sim}{F}^T$, jfr. afsnittene 16.1 og 16.2.

Den anden Piola-Kirchhoff spændingstensor kommer ind i billedet, når tøjningsenergifunktionen $w = W$ er en funktion af Greens deformationstensor $\underset{\sim}{C}$ eller Lagrangetøjningen $\underset{\sim}{E}$ og den relative temperaturdifferens θ, og man finder

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{S} &= 2\rho_0 \partial W/\partial \underset{\sim}{C} = \rho_0 \partial W/\partial \underset{\sim}{E} \\ c &= \partial W/\partial \theta \end{aligned} \tag{30.4}$$

Selvom f.eks. Cauchy-spændingen $\underset{\sim}{\sigma}$ og den infinitesimale tøjning $\underset{\sim}{\varepsilon}$ er konjugerede størrelser, kan man udmærket udtrykke $\underset{\sim}{\sigma}$ ved $\underset{\sim}{C}$, idet man i henhold til (13.19) har

$$\underset{\sim}{\sigma} = J^{-1} \underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{S} \cdot \underset{\sim}{F}^T \tag{30.5}$$

og dermed får

$$\underset{\sim}{\sigma} = 2\rho \underset{\sim}{F} \cdot (\partial W/\partial \underset{\sim}{C}) \cdot \underset{\sim}{F}^T \tag{30.6}$$

De omvendte relationer, dvs. $\underset{\sim}{\varepsilon}, \underset{\sim}{F}, \underset{\sim}{C}$ eller $\underset{\sim}{E}$ udtrykt ved $\underset{\sim}{\sigma}, \underset{\sim}{\Sigma}$ eller $\underset{\sim}{S}$, finder man ved at indføre den *komplementære tøjningsenergi* h ved

$$\begin{aligned} &\rho(\dot{u} + \dot{h}) = D(\underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{\varepsilon})/Dt = D(\underset{\sim}{\Sigma} : \underset{\sim}{F}^T)/Dt = \\ &D(\underset{\sim}{S} : \underset{\sim}{E})/Dt = \frac{1}{2} D(\underset{\sim}{S} : \underset{\sim}{C})/Dt \end{aligned} \tag{30.7}$$

Med h som en funktion af den relative temperaturdifferens θ og en af spændingstensorerne $\underset{\sim}{\sigma}, \underset{\sim}{\Sigma}$ eller S, fås

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\varepsilon} &= \rho \partial h/\partial \underset{\sim}{\sigma} \\ \underset{\sim}{F}^T &= \rho_0 \partial h/\partial \underset{\sim}{\Sigma} \\ \underset{\sim}{C} &= 2\rho_0 \partial h/\partial \underset{\sim}{S} = 2\underset{\sim}{E} + \underset{\sim}{I} \\ c &= -\partial h/\partial \theta \end{aligned} \tag{30.8}$$

30.1 Vilkårlige deformationer

Da såvel tøjningsenergifunktionen w som den komplementære tøjningsenergifunktion h er skalarer, er de udtrykt som funktioner af nogle af de skalarfunktioner, som er behandlet i afsnittene 28.1.1 og 28.2.1. De skalarfunktioner, som er invariante under en bestemt symmetri, betegnes

$$I^\gamma \quad , \quad \gamma = 1, 2, 3 \cdots \Gamma \tag{30.9}$$

og man har, at funktionerne w eller h er funktioner af disse invarianter.

Som et konkret eksempel betragtes tøjningsenergifunktionen $w(\underset{\sim}{\varepsilon}, \theta)$ som en funktion af invarianterne $I^\gamma(\underset{\sim}{\varepsilon})$, idet funktionsafhængigheden af θ ikke behandles her (se afsnit 30.3). Man har således

$$\underset{\sim}{\sigma} = \rho \frac{\partial w}{\partial I^\gamma} \frac{\partial I^\gamma}{\partial \underset{\sim}{\varepsilon}} \tag{30.10}$$

som med notationen

$$w_\gamma = \partial w / \partial I^\gamma \tag{30.11}$$

kan skrives

$$\underset{\sim}{\sigma} = \rho w_\gamma \partial I^\gamma / \partial \underset{\sim}{\varepsilon} \tag{30.12}$$

For et eksempelvis isotropt materiale er, se (28.30) og (26.82)

$$\begin{aligned} I^1 &= \underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{\varepsilon} \quad , \quad \partial I^1 / \partial \underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{I} \\ I^2 &= \underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{\varepsilon}^2 \quad , \quad \partial I^2 / \partial \underset{\sim}{\varepsilon} = 2\underset{\sim}{\varepsilon} \\ I^3 &= \underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{\varepsilon}^3 \quad , \quad \partial I^3 / \partial \underset{\sim}{\varepsilon} = 3\underset{\sim}{\varepsilon}^2 \end{aligned} \tag{30.13}$$

og dermed

$$\underset{\sim}{\sigma} = \rho\left(w_1 \underset{\sim}{I} + 2w_2 \underset{\sim}{\varepsilon} + 3w_3 \underset{\sim}{\varepsilon}^2\right) \tag{30.14}$$

som er i overensstemmelse med eksempel 28.4, idet tøjningstensoren er selvtransponeret, $\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{\varepsilon}^T$.

For et materiale som udviser transvers isotropi, har man, at tøjningsenergien er en funktion af yderligere 7 invarianter, se eksempel 28.3

$$\begin{aligned} I^4 &= \hat{a}\hat{a} : \underset{\sim}{\varepsilon} \quad , \quad \partial I^4 / \partial \underset{\sim}{\varepsilon} = \hat{a}\hat{a} \\ I^5 &= \hat{a}\hat{a} : \underset{\sim}{\varepsilon}^2 \quad , \quad \partial I^5 / \partial \underset{\sim}{\varepsilon} = 2\hat{a}\hat{a} \cdot \underset{\sim}{\varepsilon} \\ & I^6, I^7 \cdots I^{10} \end{aligned} \tag{30.15}$$

hvor $\hat{a}$ er symmetriaksen. Hermed bliver

$$\underset{\sim}{\sigma} = \rho\left(w_1 \underset{\sim}{I} + 2w_2 \underset{\sim}{\varepsilon} + 3w_3 \underset{\sim}{\varepsilon}^2 + w_4 \hat{a}\hat{a} + 2w_5 \hat{a}\hat{a} \cdot \underset{\sim}{\varepsilon} + \cdots\right) \tag{30.16}$$

Af (30.14) fremgår, at $\underset{\sim}{\varepsilon}$ og $\underset{\sim}{\sigma}$ har samme hovedretninger i et isotropt materiale, mens det af (30.16) fremgår, at dette ikke er tilfældet for et anisotropt materiale med mindre symmetriaksen $\hat{a}$ er en af hovedretningerne for tøjningerne.

I teorien for store deformationer antages ofte, at materialet er usammentrykkeligt, dvs. deformationerne foregår under volumenkonstans. Som anført i afsnit 9.2.1b, se også afsnit 7.1.4, udtrykkes volumenforholdet ved

$$J = \det \underset{\sim}{F} = III_F = III_C^{\frac{1}{2}} = III_B^{\frac{1}{2}} \tag{30.17}$$

og det er derfor en fordel, når tøjningsenergifunktionen er angivet som en funktion af bl.a. denne invariant.

Tøjningsenergifunktionen udtrykkes nu som en funktion af hovedinvarianterne af Greens deformationstensor $\underset{\sim}{C} = \underset{\sim}{F}^T \cdot \underset{\sim}{F}$, dvs.

$$\begin{aligned} I^1 &= I_c = \underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{C} \\ I^2 &= II_c = \left(I_c^2 - I_{c^2}\right)/2 \\ I^3 &= III_c = \left(I_c^3 - 3I_cI_{c^2} + 2I_{c^3}\right)/6 \end{aligned} \tag{30.18}$$

se (26.80) - (26.91). Hermed bliver

$$\begin{aligned} \partial I^1/\partial \underset{\sim}{C} &= \underset{\sim}{I} \\ \partial I^2/\partial \underset{\sim}{C} &= I_c\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{C} \\ \partial I^3/\partial \underset{\sim}{C} &= II_c\underset{\sim}{I} - I_c\underset{\sim}{C} + \underset{\sim}{C}^2 = III_c\underset{\sim}{C}^{-1} \end{aligned} \tag{30.19}$$

og for et isotropt materiale bliver, jf. (30.6)

$$\underset{\sim}{\sigma} = 2\rho\underset{\sim}{F} \cdot \left(W_1\underset{\sim}{I} + W_2(I_c\underset{\sim}{I} - \underset{\sim}{C}) + W_3(II_c\underset{\sim}{I} - I_c\underset{\sim}{C} + \underset{\sim}{C}^2)\right) \cdot \underset{\sim}{F}^T \tag{30.20}$$

Indføres Fingers deformationstensor $\underset{\sim}{B} = \underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{F}^T$ og dermed

$$\begin{aligned} &\underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{I} \cdot \underset{\sim}{F}^T = \underset{\sim}{B} \\ &\underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{C} \cdot \underset{\sim}{F}^T = \underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{F}^T \cdot \underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{F}^T = \underset{\sim}{B}^2 \\ &\underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{C}^2 \cdot \underset{\sim}{F}^T = \underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{F}^T \cdot \underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{F}^T \cdot \underset{\sim}{F} \cdot \underset{\sim}{F}^T = \underset{\sim}{B}^3 \end{aligned} \tag{30.21}$$

har man

$$\underset{\sim}{\sigma} = 2\rho\left((W_1 + W_2I_C + W_3II_C)\underset{\sim}{B} - (W_2 + W_3I_C)\underset{\sim}{B}^2 + W_3\underset{\sim}{B}^3\right) \tag{30.22}$$

som ved hjælp af Cayley-Hamiltons sætning (6.100)

$$\underset{\sim}{B}^3 = I_B\underset{\sim}{B}^2 - II_B\underset{\sim}{B} + III_B\underset{\sim}{I} \tag{30.23}$$

og

$$I^1 = I_C = I_B,\ I^2 = II_C = II_B \quad \text{og} \quad I^3 = III_C = III_B \tag{30.24}$$

kan skrives

$$\underset{\sim}{\sigma} = 2\rho\big(W_3 III_B\underset{\sim}{I} + (W_1 + W_2 I_B)\underset{\sim}{B} - W_2 B^2\big) \tag{30.25}$$

Ovenstående gælder for sammentrykkelige materialer. For usammentrykkelige materialer er det ikke nok at sætte $III_B = 1$, da der kan være problemer med nogle afledede af W. En måde at undgå vanskeligheder på er, at indføre en Lagrangefaktor og skrive tøjningsenergifunktionen

$$W(I^1, I^2, I^3) = W(I^1, I^2) - \frac{1}{2}p(I^3 - 1) \tag{30.26}$$

Hermed finder man

$$\underset{\sim}{\sigma} = \rho_0\big(-p\underset{\sim}{I} + 2(W_1 + W_2 I_B)\underset{\sim}{B} - 2W_2\underset{\sim}{B}^2\big) \tag{30.27}$$

idet man for usammentrykkelige materialer har $\rho = \rho_0$. Resultatet er i overensstemmelse med afsnit 17.2.

Eksempel 30.1

Visse gummilignende materialer kan med god tilnærmelse regnes usammentrykkelige og spændingerne bestemmes ved hjælp af

$$\underset{\sim}{\sigma} = -p\underset{\sim}{I} + 2W_1\underset{\sim}{B} - 2W_2\underset{\sim}{B}^{-1} \tag{a}$$

se øvelse 30.1.

Deformationen

$$\overline{r} = \big(\Lambda_1\hat{i}\hat{i} + \Lambda_2\hat{j}\hat{j} + \Lambda_3\hat{k}\hat{k}\big)\cdot\overline{R} \tag{b}$$

hvor $\hat{i}, \hat{j}$ og $\hat{k}$ er et sæt ortogonale enhedsvektorer og Λ_m er tre konstanter, repræsenterer en homogen deformation, se afsnit 9.1.1. Med

$$\Lambda_1 = a \quad \text{og} \quad \Lambda_2 = \Lambda_3 = b \tag{c}$$

bliver

$$\underset{\sim}{B} = a^2\hat{i}\hat{i} + b^2(\hat{j}\hat{j} + \hat{k}\hat{k} \tag{d}$$

For usammentrykkelige materialer er

$$III_B = a^2 b^4 = 1 \tag{e}$$

dvs.

$$b^2 = a^{-1} \tag{f}$$

og

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{B} &= (a^2 - a^{-1})\hat{i}\hat{i} + a^{-1}\underset{\sim}{I} \\ \underset{\sim}{B}^{-1} &= (a^{-2} - a)\hat{i}\hat{i} + a\underset{\sim}{I} \end{aligned} \tag{g}$$

Ved hjælp af (a) og (g) finder man, at for

$$p = 2a^{-1}W_1 - 2aW_2 \tag{h}$$

er spændingen

$$\underset{\sim}{\sigma} = 2\big((a^2 - a^{-1})W_1 - (a^{-2} - a)W_2\big)\hat{i}\hat{i} = \sigma\hat{i}\hat{i} \tag{i}$$

et enakset træk i $\hat{\imath}$-retningen.

For $W(I^1, I^2)$ i (a) har man anvendt

$$W(I^1, I^2) = C_1(I^1 - 3) \tag{j}$$

og

$$W(I^1, I^2) = C_1(I^1 - 3) + C_2(I^2 - 3) \tag{k}$$

hvor C_1 og C_2 er konstanter. Udtrykket (j) fører til et neo-Hookean materiale, mens (k) fører til et Mooney-Rivlin materiale.

Med

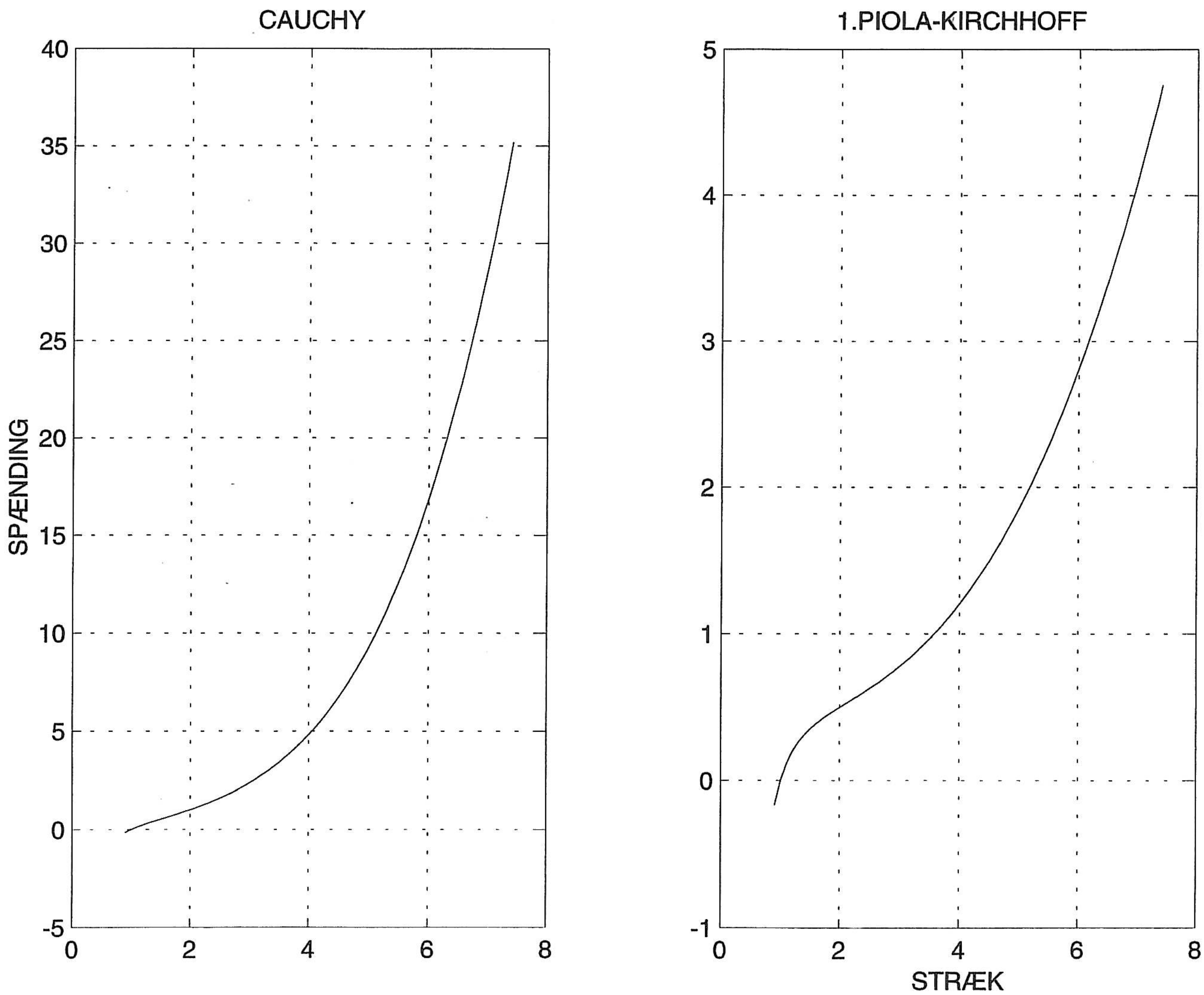
$$W(I^1, I^2) = C_1(I^1 - 3) + \frac{1}{2}C_2(I^2 - 3)^{2} + C_3(I^2 - 3) \tag{l}$$

og

$$C_1 = 0,0774$$
$$C_2 = 0,0099 \qquad \text{(m)}$$
$$C_3 = 0,3773$$

er sammenhængen mellem Cauchyspændingen σ og strækket a vist i figur 30.1. Også sammenhængen mellem 1. Piola-Kirchhoff spænding Σ og strækket a er vist i figuren. I dette eksempel er

$$\underset{\sim}{\Sigma} = \underset{\sim}{\sigma}/a \qquad \text{(n)}$$



Figur 30.1

Eksempel 30.2

Udsættes et sammentrykkeligt materiale for deformationen

$$\overline{r} = \left(a\hat{i}\hat{i} + b(\hat{j}\hat{j} + \hat{k}\hat{k})\right) \cdot \overline{R} \tag{a}$$

og dermed

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{B} &= a^2\hat{i}\hat{i} + b^2(\hat{j}\hat{j} + \hat{k}\hat{k}) \\ \underset{\sim}{B}^{-1} &= a^{-2}\hat{i}\hat{i} + b^{-2}(\hat{j}\hat{j} + \hat{k}\hat{k}) \end{aligned} \tag{b}$$

bliver spændingen $\underset{\sim}{\sigma}$

$$\underset{\sim}{\sigma} = 2\rho\Big((w_1a^2+2w_2a^2b^2+w_3a^2b^4)\hat{i}\hat{i}+\big((w_1+w_2a^2)b^2+(w_2+w_3a^2)b^4\big)(\hat{j}\hat{j}+\hat{k}\hat{k})\Big) \tag{c}$$

som for

$$b^2 = -(w_1 + w_2a^2)/(w_2 + w_3a^2) \tag{d}$$

er et enakset træk.

Eksempel 30.3

Tøjningsenergifunktionen W kan som nævnt udtrykkes som en funktion af invarianterne $I^1 = \underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{C}$, $I^2 = \underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{C}^2$, $I^3 = \underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{C}^3$ eller hovedinvarianterne $I_{\underset{\sim}{C}}, II_{\underset{\sim}{C}}$ og $III_{\underset{\sim}{C}}$. En tredie mulighed er at udtrykke tøjningsenergifunktionen som en funktion af deformationstensorens egenværdier C_1, C_2 og C_3.

Af

$$\begin{aligned} I_C &= C_1 + C_2 + C_3 \\ II_C &= C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_1 \\ III_C &= C_1C_2C_3 \end{aligned} \tag{a}$$

finder man

$$\begin{aligned} \partial W/\partial C_1 &= \partial W/\partial I + (C_2 + C_3)\partial W/\partial II + C_2C_3\partial W/\partial III \\ \partial W/\partial C_2 &= \partial W/\partial I + (C_3 + C_1)\partial W/\partial II + C_3C_1\partial W/\partial III \\ \partial W/\partial C_3 &= \partial W/\partial I + (C_1 + C_2)\partial W/\partial II + C_1C_2\partial W/\partial III \end{aligned} \tag{b}$$

som løst med hensyn til $\partial W/\partial I$, $\partial W/\partial II$ og $\partial W/\partial III$ giver

$$
\begin{aligned}
C\partial W/\partial I &= -(C_1^2(C_2 - C_3)\partial W/\partial C_1 + C_2^2(C_3 - C_1)\partial W/\partial C_2 + C_3^2(C_1 - C_2)\partial W/\partial C_3) \\
C\partial W/\partial II &= C_1(C_2 - C_3)\partial W/\partial C_1 + C_2(C_3 - C_1)\partial W/\partial C_2 + C_3(C_1 - C_2)\partial W/\partial C_3 \\
C\partial W/\partial III &= -((C_2 - C_3)\partial W/\partial C_1 + (C_3 - C_1)\partial W/\partial C_2 + (C_1 - C_2)\partial W/\partial C_3)
\end{aligned}
\qquad \text{(c)}
$$

hvor

$$C = (C_1 - C_2)(C_2 - C_3)(C_3 - C_1) \qquad \text{(d)}$$

Man bemærker, at deformationstensorens egenværdier C_1, C_2 og C_3 udtrykkes ved deformationsgradienttensorens egenværdier Λ_1, Λ_2 og Λ_3 som

$$C_1 = \Lambda_1^2, C_2 = \Lambda_2^2 \quad \text{og} \quad C_3 = \Lambda_3^2 \qquad \text{(e)}$$

Spændingerne bestemmes herefter af

$$\underset{\sim}{S} = 2\rho_0 \frac{\partial W}{I^\gamma} \frac{\partial I^\gamma}{\partial \underset{\sim}{C}} \qquad \text{(f)}$$

hvor $I^1 = I_C$, $I^2 = II_C$ og $I^3 = III_C$ og $\partial I^\gamma / \partial \underset{\sim}{C}$ er bestemt ved (30.19)

30.2 Infinitesimale deformationer

En lineær sammenhæng mellem spændinger og tøjninger får man ved at benytte en tøjningsenergifunktion

$$\rho_0 W = \frac{1}{2} \underset{\sim}{\varepsilon} : \underset{\sim}{C} : \underset{\sim}{\varepsilon} \qquad (30.28)$$

hvor $\underset{\sim}{C}$ er en tensor af fjerde orden, som er en sum af de strukturtensorer, der beskriver den pågældende materialesymmetri, multipliceret med eventuelt temperaturafhængige konstanter, dvs.

$$\underset{\sim}{C} = C^\gamma \underset{\sim}{\xi}_\gamma \qquad (30.29)$$

Skriver man

$$\underset{\sim}{C} = \overline{\overline{U}}^\kappa \overline{\overline{V}}_\kappa \qquad (30.30)$$

har man

$$\rho_0 W = \frac{1}{2}\underset{\sim}{\varepsilon} : \underset{\sim}{U}^{\kappa}\underset{\sim}{V}_{\kappa} : \underset{\sim}{\varepsilon} = \frac{1}{4}\underset{\sim}{\varepsilon} : (\underset{\sim}{U}^{\kappa}\underset{\sim}{V}_{\kappa} + \underset{\sim}{V}_{\kappa}\underset{\sim}{U}^{\kappa}) : \underset{\sim}{\varepsilon} \tag{30.31}$$

og derfor

$$\begin{aligned}
\rho_0 dw/d\underset{\sim}{\varepsilon} &= \frac{1}{2}\underset{\sim}{B}^{kl}(\underset{\sim}{B}_{kl} : \underset{\sim}{C} : \underset{\sim}{\varepsilon} + \underset{\sim}{\varepsilon} : \underset{\sim}{C} : \underset{\sim}{B}_{kl}) \\
&= \frac{1}{2}\underset{\sim}{C} : \underset{\sim}{\varepsilon} + \frac{1}{2}\underset{\sim}{B}^{kl}\underset{\sim}{\varepsilon} : (\underset{\sim}{U}^{\kappa}\underset{\sim}{V}_{\kappa} + \underset{\sim}{V}_{\kappa}\underset{\sim}{U}^{\kappa}) : \underset{\sim}{B}_{kl} \\
&= \frac{1}{2}\underset{\sim}{C} : \underset{\sim}{\varepsilon} + \frac{1}{2}(\underset{\sim}{V}_{\kappa}\underset{\sim}{\varepsilon} : \underset{\sim}{U}^{\kappa} + \underset{\sim}{U}^{\kappa}\underset{\sim}{\varepsilon} : \underset{\sim}{V}_{k}) \\
&= \frac{1}{2}\underset{\sim}{C} : \underset{\sim}{\varepsilon} + \frac{1}{2}(\underset{\sim}{V}_{\kappa}\underset{\sim}{U}^{\kappa} + \underset{\sim}{U}^{\kappa}\underset{\sim}{V}_{\kappa}) : \underset{\sim}{\varepsilon} \\
&= \underset{\sim}{C} : \underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{\varepsilon} : \underset{\sim}{C}
\end{aligned} \tag{30.32}$$

eller, i henhold til (30.1)

$$\underset{\sim}{\sigma} = \frac{\rho}{\rho_0}\underset{\sim}{C} : \underset{\sim}{\varepsilon} \tag{30.33}$$

Da man for små tøjninger har

$$\rho \simeq \rho_0 \tag{30.34}$$

bliver

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{C} : \underset{\sim}{\varepsilon} \tag{30.35}$$

Idet tøjningstensoren $\underset{\sim}{\varepsilon}$ er selvtransponeret, er f.eks.

$$\underset{\sim}{V}_{\kappa} : \underset{\sim}{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{V}_{\kappa} + \underset{\sim}{V}_{\kappa}^{T}) : \underset{\sim}{\varepsilon} \tag{30.36}$$

og man kan skrive

$$\underset{\sim}{C} = \frac{1}{8}\Big((\underset{\sim}{U}^{\kappa} + \underset{\sim}{U}^{\kappa T})(\underset{\sim}{V}_{\kappa} + \underset{\sim}{V}_{\kappa}^{T}) + (\underset{\sim}{V}_{\kappa} + \underset{\sim}{V}_{\kappa}^{T})(\underset{\sim}{U}^{\kappa} + \underset{\sim}{U}^{\kappa T})\Big) \tag{30.37}$$

Man bemærker, at også spændingstensoren bliver selvtransponeret, når udgangspunktet er tøjningsenergifunktionen (30.28). Dette vil ikke umiddelbart være tilfældet, hvis udgangspunktet er den lineære sammenhæng (30.35). Man får da

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{U}^{\kappa}\underset{\sim}{V}_{\kappa} : \underset{\sim}{\varepsilon} = \frac{1}{2}\underset{\sim}{U}^{\kappa}(\underset{\sim}{V}_{\kappa} + \underset{\sim}{V}_{\kappa}^{T}) : \underset{\sim}{\varepsilon} \tag{30.38}$$

som, når $\underset{\sim}{\sigma}$ skal være selvtransponeret, kan skrives

$$\underset{\sim}{\sigma} = \frac{1}{4}(\underset{\sim}{U}^{\kappa} + \underset{\sim}{U}^{\kappa T})(\underset{\sim}{V}_{\kappa} + \underset{\sim}{V}_{\kappa}^{T}) : \underset{\sim}{\varepsilon} \tag{30.39}$$

Det sidste led i (30.37) optræder kun, når en tøjningsenergifunktion eksisterer.

Eksempel 30.4

Antallet af konstanter C^{γ}, som optræder i (30.29), $\underset{\sim}{C} = C^{\gamma}\underset{\sim}{\xi}_{\gamma}$, skal bestemmes for et ortotropt materiale. Et ortotropt materiales symmetriforhold beskrives ved $\{1\ 2\ 2\}$ i tabel 27.1, og da strukturtensorerne $\underset{\sim}{\xi}_{\gamma}$ med $\gamma = 4$, 20 og 33 indgår, kan symmetriforholdene beskrives som $\{2\ 2\ 2\}$, dvs. materialet har 3 på hinanden vinkelrette 2-fold symmetriakser.

I henhold til tabel 27.1 indgår der 21 strukturtensorer i beskrivelsen af symmetriforholdene, når der ikke er taget hensyn til, at $\underset{\sim}{\sigma}$ og $\underset{\sim}{\varepsilon}$ i $\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{C} : \underset{\sim}{\varepsilon}$ er selvtransponerede. Skrives $\underset{\sim}{\xi} = \underset{\sim}{U}^{\kappa}\underset{\sim}{V}_{\kappa}$ og tages $\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{\varepsilon}^{T}$ i regning ved

$$\underset{\sim}{\xi} = \underset{\sim}{U}^{\kappa}(\underset{\sim}{V}_{\kappa} + \underset{\sim}{V}_{\kappa}^{T}) \tag{a}$$

bliver

$$\begin{aligned}
\underset{\sim}{\xi}_1 &= \underset{\sim}{I}\underset{\sim}{I} \\
\underset{\sim}{\xi}_2 &= \underset{\sim}{\xi}_3 = \underset{\sim}{J} + \underset{\sim}{T} = 2\hat{i}\hat{i}\hat{i}\hat{i} + (\hat{i}\hat{j} + \hat{j}\hat{i})(\hat{i}\hat{j} + \hat{j}\hat{i}) + (\hat{i}\hat{k} + \hat{k}\hat{i})(\hat{i}\hat{k} + \hat{k}\hat{i}) \\
&\quad + 2\hat{j}\hat{j}\hat{j}\hat{j} + (\hat{j}\hat{k} + \hat{k}\hat{j})(\hat{j}\hat{k} + \hat{k}\hat{j}) + 2\hat{k}\hat{k}\hat{k}\hat{k} \\
\underset{\sim}{\xi}_4 &= kkkk \\
\underset{\sim}{\xi}_5 &= kk(ii + jj) \\
\underset{\sim}{\xi}_6 &= \underset{\sim}{\xi}_7 = ki(ki + ik) + kj(kj + jk) \\
\underset{\sim}{\xi}_8 &= (ii + jj)kk \\
\underset{\sim}{\xi}_9 &= \underset{\sim}{\xi}_{10} = ik(ik + ki) + jk(jk + kj) \\
\underset{\sim}{\xi}_{20} &= iiii + jjjj + kkkk \\
\underset{\sim}{\xi}_{30} &= kk(ii - jj) + ii(jj - kk) + jj(kk - ii) \\
\underset{\sim}{\xi}_{31} &= \underset{\sim}{\xi}_{32} = (ki - ik)(ki + ik) + (jk - kj)(jk + kj) + (ij - ji)(ij + ji)
\end{aligned} \tag{b}$$

$$\underset{\sim}{\xi}_{33} = iiii - jjjj$$

$$\underset{\sim}{\xi}_{34} = kk(ii - jj)$$

$$\underset{\sim}{\xi}_{35} = \underset{\sim}{\xi}_{36} = ki(ki + ik) - kj(kj + jk)$$

$$\underset{\sim}{\xi}_{37} = (jj - ii)kk$$

$$\underset{\sim}{\xi}_{38} = \underset{\sim}{\xi}_{39} = jk(jk + kj) - ik(ik + ki)$$

og antallet af uafhængige strukturtensorer reduceres til 15.

Tages $\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{\sigma}^T$ i regning ved

$$\underset{\sim}{\xi} = (\underset{\sim}{U}^\kappa + U^{\kappa T})(\underset{\sim}{V}_\kappa + \underset{\sim}{V}_\kappa^T) \qquad \text{(c)}$$

bliver yderligere

$$\begin{aligned} &\underset{\sim}{\xi}_6 = \underset{\sim}{\xi}_7 = \underset{\sim}{\xi}_9 = \underset{\sim}{\xi}_{10} = (ki + ik)(ki + ik) + (jk + kj)(jk + kj) \\ &\underset{\sim}{\xi}_{31} = \underset{\sim}{\xi}_{32} = 0 \\ &\underset{\sim}{\xi}_{35} = \underset{\sim}{\xi}_{36} = -\underset{\sim}{\xi}_{38} = -\underset{\sim}{\xi}_{39} = (ki + ik)(ki + ik) - (kj + jk)(kj + jk) \end{aligned} \qquad \text{(d)}$$

og antallet reduceres til 12.

Udnyttes endeligt, at sammenhængen mellem spændinger og tøjninger er baseret på en tøjningsenergifunktion så

$$\underset{\sim}{C} = (\underset{\sim}{U}^\kappa + \underset{\sim}{U}^{\kappa T})(\underset{\sim}{V}_\kappa + \underset{\sim}{V}_\kappa^T) + (V_\kappa + V_\kappa^T)(U^\kappa + U^{\kappa T}) \qquad \text{(e)}$$

bliver

$$\begin{aligned} &\underset{\sim}{\xi}_5 = \underset{\sim}{\xi}_8 \\ &\underset{\sim}{\xi}_{30} = 0 \\ &\underset{\sim}{\xi}_{34} = -\underset{\sim}{\xi}_{37} \end{aligned} \qquad \text{(f)}$$

og det endelige antal strukturtensorer bliver 9.

De ni strukturtensorer er f.eks.

$$
\begin{aligned}
&\underset{\sim}{\xi}_1 = \underset{\sim}{I}\underset{\sim}{I} = (ii + jj + kk)(ii + jj + kk) \\
&\underset{\sim}{\xi}_2 = \underset{\sim}{\xi}_3 = \underset{\sim}{J} + \underset{\sim}{T} = 2iiii + (ij + ji)(ij + ji) + (ik + ki)(ik + ki) \\
&+ 2jjjj + (jk + kj)(jk + kj) + 2kkkk \\
&\underset{\sim}{\xi}_4 = kkkk \\
&\underset{\sim}{\xi}_5 = \underset{\sim}{\xi}_8 = kk(ii + jj) + (ii + jj)kk \\
&\underset{\sim}{\xi}_6 = \underset{\sim}{\xi}_7 = \underset{\sim}{\xi}_9 = \underset{\sim}{\xi}_{10} = (ki + ik)(ki + ik) + (jk + kj)(jk + kj) \\
&\underset{\sim}{\xi}_{20} = iiii + jjjj + kkkk \\
&\underset{\sim}{\xi}_{33} = iiii - jjjj \\
&\underset{\sim}{\xi}_{34} = -\underset{\sim}{\xi}_{37} = kk(ii - jj) + (ii - jj)kk \\
&\underset{\sim}{\xi}_{35} = \underset{\sim}{\xi}_{36} = -\underset{\sim}{\xi}_{38} = -\underset{\sim}{\xi}_{39} = (ki + ik)(ki + ik) - (jk + kj)(jk + kj)
\end{aligned}
\tag{g}
$$

Et sæt, som er mere overskueligt, er

$$
\begin{aligned}
&\underset{\sim}{\xi}_1 = \underset{\sim}{I}\underset{\sim}{I} \\
&\underset{\sim}{\xi}_2 = \underset{\sim}{J} + \underset{\sim}{T} \\
&\underset{\sim}{\xi}_3 = iiii \\
&\underset{\sim}{\xi}_4 = jjjj \\
&\underset{\sim}{\xi}_5 = kkkk \\
&\underset{\sim}{\xi}_6 = kkii + iikk \\
&\underset{\sim}{\xi}_7 = jjkk + kkjj \\
&\underset{\sim}{\xi}_8 = (ki + ik)(ki + ik) \\
&\underset{\sim}{\xi}_9 = (jk + kj)(jk + kj)
\end{aligned}
$$

og i den konstitutive ligning

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{C} : \underset{\sim}{\varepsilon}$$

hvor $\underset{\sim}{C} = C^{\gamma}\underset{\sim}{\xi}_{\gamma} \quad , \quad \gamma = 1, 2 \cdots 9$

indgår således 9 elastiske konstanter for et lineærelastisk, ortotropt materiale.

Eksempel 30.5

Af eksempel 30.4 og bemærkningen om frembringertensorer i forbindelse med (27.17) fremgår, at de strukturtensorer, der beskriver et isotropt materiale, er $\underset{\sim}{I}\underset{\sim}{I}$ og $\underset{\sim}{J} + \underset{\sim}{T}$. I udtrykket for tøjningsenergifunktionen, $\rho_0 W = \frac{1}{2}\underset{\sim}{\varepsilon} : \underset{\sim}{C} : \underset{\sim}{\varepsilon}$, kan man derfor sætte

$$\underset{\sim}{C} = \lambda \underset{\sim}{I}\underset{\sim}{I} + \mu(\underset{\sim}{J} + \underset{\sim}{T}) \tag{a}$$

hvor λ og μ er *Lamekonstanterne.* Tøjningsenergifunktionen bliver hermed

$$\begin{aligned} \rho_0 W &= \frac{1}{2}\lambda I^2_{\underset{\sim}{\varepsilon}} + \mu \underset{\sim}{\varepsilon} : \underset{\sim}{\varepsilon} \\ &= \frac{1}{2}\lambda I^2_{\underset{\sim}{\varepsilon}} + \mu I_{\underset{\sim}{\varepsilon}^2} \end{aligned} \tag{b}$$

Da man ifølge (26.88) har

$$I_{\underset{\sim}{\varepsilon}^2} = I^2_{\underset{\sim}{\varepsilon}} - 2II_{\underset{\sim}{\varepsilon}} \tag{c}$$

er $I_{\underset{\sim}{\varepsilon}^2}$ ikke uafhængig af $I_{\underset{\sim}{\varepsilon}}$ og $0 < \lambda$, $0 < \mu$ er ikke en nødvendig betingelse for, at W er positiv definit, som man må forlange, da arbejdet der skal ydes for at føre materialet fra udeformeret til deformeret tilstand er positivt.

Indføres deviationstøjningerne $\underset{\sim}{\varepsilon}'$ ved

$$\underset{\sim}{\varepsilon}' = \underset{\sim}{\varepsilon} - I_{\varepsilon}\underset{\sim}{I}/3 = \underset{\sim}{\varepsilon}'^T \tag{d}$$

bliver

$$I_{\underset{\sim}{\varepsilon}'} = 0 \tag{e}$$

og $\quad I_{\underset{\sim}{\varepsilon}^2} = \underset{\sim}{\varepsilon} : \underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{\varepsilon}' : \underset{\sim}{\varepsilon}' + I^2_{\underset{\sim}{\varepsilon}}/3$

Man har nu

$$\rho_0 W = \frac{1}{2}((\lambda + 2\mu/3)I^2_{\underset{\sim}{\varepsilon}} + 2\mu I_{\underset{\sim}{\varepsilon}'^2} \tag{f}$$

og nødvendige og tilstrækkelige betingelser for, at tøjningsenergifunktionen er positiv definit er

$$0 < \lambda + 2\mu/3 \quad \text{og} \quad 0 < \mu \tag{g}$$

Eksempel 30.6

For et lineærelastisk, isotropt materiale har man spændingerne udtrykt ved tøjningerne i *Hookes lov*:

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{C} : \underset{\sim}{\varepsilon} = \lambda I_{\varepsilon} \underset{\sim}{I} + 2\mu \underset{\sim}{\varepsilon} \tag{a}$$

hvor tensoren af fjerde orden, $\underset{\sim}{C}$, kaldes stivhedstensoren.

I den omvendte relation

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{S} : \underset{\sim}{\sigma} \tag{b}$$

kaldes $\underset{\sim}{S}$ flexibilitets- eller eftergivelighedstensoren, og man kan skrive

$$\underset{\sim}{S} = S^1 \underset{\sim}{I}\underset{\sim}{I} + S^2(\underset{\sim}{J} + \underset{\sim}{T}) \tag{c}$$

så

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = S^1 I_{\sigma} \underset{\sim}{I} + 2S^2 \underset{\sim}{\sigma} \tag{d}$$

Af (a) og (d) finder man ved at dobbeltprikke med $\underset{\sim}{I}$

$$\begin{aligned} I_{\sigma} &= (3\lambda + 2\mu) I_{\underset{\sim}{\varepsilon}} \\ I_{\underset{\sim}{\varepsilon}} &= (3S^1 + 2S^2) I_{\underset{\sim}{\sigma}} \end{aligned} \tag{e}$$

og ved at dobbeltprikke med f.eks. $\hat{j}\hat{k}$

$$\begin{aligned} \hat{j} \cdot \underset{\sim}{\sigma} \cdot \hat{k} &= 2\mu \hat{j} \cdot \underset{\sim}{\varepsilon} \cdot \hat{k} \\ \hat{j} \cdot \underset{\sim}{\varepsilon} \cdot \hat{k} &= 2S^2 \hat{j} \cdot \underset{\sim}{\sigma} \cdot \hat{k} \end{aligned} \tag{f}$$

Hermed bliver

$$\begin{aligned} 2S^2 &= 1/2\mu \\ S^1 &= \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \end{aligned} \tag{g}$$

dvs.

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \frac{-\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} I_{\underset{\sim}{\sigma}} \underset{\sim}{I} + \frac{1}{2\mu} \underset{\sim}{\sigma} \tag{h}$$

Ofte skrives

$$E\underset{\sim}{\varepsilon} = (1+\nu)\underset{\sim}{\sigma} - \nu I_\sigma \underset{\sim}{I} \tag{i}$$

hvor E er elasticitetskoefficienten, og ν er Poissons forhold. Ved et enakset træk f.eks.

$$\underset{\sim}{\sigma} = t\hat{i}\hat{i} \tag{j}$$

finder man

$$E\underset{\sim}{\varepsilon} = t\hat{i}\hat{i} - \nu t(\hat{j}\hat{j} + \hat{k}\hat{k}) \tag{k}$$

dvs. E angiver forholdet mellem trækspænding og forlængelse i trækretningen og ν angiver forholdet mellem sammentrækningen på tværs og forlængelsen. ν kaldes derfor også tværkontraktionsforholdet.

Mellem de to sæt elasticitetskonstanter gælder

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad , \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \\ E &= \frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu} \quad , \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)} \end{aligned} \tag{l}$$

En femte elasticitetskonstant er forskydningsmodulen G

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \mu \tag{m}$$

Med

$$0 < 3\lambda + 2\mu \quad \text{og} \quad 0 < \mu \tag{u}$$

finder man

$$0 < E \quad \text{og} \quad -1 < \nu < \frac{1}{2} \tag{o}$$

som betingelser for, at der skal ydes et positivt arbejde for at deformere et lineærelastisk, isotropt materiale bort fra den udeformerede, spændingsfri tilstand.

Den komplementære tøjningsenergifunktion er

$$h = \frac{1}{2}\underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{S} : \underset{\sim}{\sigma}$$

30.3 Temperaturafhængighed

En simpel temperaturafhængighed findes ved at supplere tøjningsenergifunktionen w med

$$w_\theta = c_0\theta - A\underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{\varepsilon}\theta/\rho + \frac{1}{2}K\theta^2 \tag{30.40}$$

så man har

$$w = w_\varepsilon + w_\theta \tag{30.41}$$

Hermed bliver spændingerne

$$\underset{\sim}{\sigma} = \rho\partial w_\varepsilon/\partial\underset{\sim}{\varepsilon} - A\underset{\sim}{I}\theta \tag{30.42}$$

og varmefylden

$$c = \partial w/\partial\theta = c_0 - A\underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{\varepsilon}/\rho + K\theta \tag{30.43}$$

hvor c_0 er varmefylden ved referencetemperaturen T_0. Skalaren A er i det isotrope, lineærelastiske tilfælde

$$A = E\alpha/(1-2\nu) \tag{30.44}$$

hvor E er elasticitetskoefficienten og α er temperaturudvidelseskoefficienten.

Tilsvarende skal den komplementære tøjningsenergi suppleres med

$$h_\theta = -c_0\theta + B\underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{\sigma}\theta/\rho - \frac{1}{2}K\theta^2 \tag{30.45}$$

så man får

$$h = h_\varepsilon + h_\theta \tag{30.46}$$

og

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\varepsilon} &= \rho\partial h_\varepsilon/\partial\underset{\sim}{\sigma} + B\underset{\sim}{I}\theta \\ c &= -\partial h/\partial\theta = c_0 - BI : \sigma/\rho + K\theta \end{aligned} \tag{30.47}$$

hvor

$$B = \alpha \tag{30.48}$$

i det lineærelastiske tilfælde.

Øvelser

30.1) Vis, at (30.25) og (30.27) kan skrives

$$\underset{\sim}{\sigma} = 2\rho\big(W_1\underset{\sim}{B} + (W_2 II_B + W_3 III_B)\underset{\sim}{I} - W_2 III_B \underset{\sim}{B}^{-1}\big)$$

og $\underset{\sim}{\sigma} = \rho_0\big(-p\underset{\sim}{I} + 2W_1\underset{\sim}{B} - 2W_2\underset{\sim}{B}^{-1}\big)$

30.2) Udled (30.27) på grundlag af (30.23)

30.3) Vis, at symmetriforholdene for et lineærelastisk, transvers isotropt materiale beskrives ved de fem strukturtensorer

$$\underset{\sim}{\xi}_1 = \underset{\sim}{I}\underset{\sim}{I}$$
$$\underset{\sim}{\xi}_2 = \underset{\sim}{J} + \underset{\sim}{T}$$
$$\underset{\sim}{\xi}_3 = \hat{k}\hat{k}\hat{k}\hat{k}$$
$$\underset{\sim}{\xi}_4 = \hat{k}\hat{k}(\hat{i}\hat{i} + \hat{j}\hat{j}) + (\hat{i}\hat{i} + \hat{j}\hat{j})\hat{k}\hat{k}$$
$$\underset{\sim}{\xi}_5 = (ki + ik)(ki + ik) + (jk + kj)(jk + kj)$$

30.4) Vis, at det for $\underset{\sim}{C}$ og $\underset{\sim}{S}$ fra eksemplerne 30.5 og 30.6 gælder, at $\underset{\sim}{C} : \underset{\sim}{S} = \underset{\sim}{S} : \underset{\sim}{C} = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{J} + \underset{\sim}{T})$

31. DISSIPATIVE MATERIALEELEMENTER

Dissipative materialer defineres som i det endimensionale tilfælde ved:

- de aktuelle tilstandsparametre er massetætheden ρ, tøjningstensoren $\underset{\sim}{\varepsilon}$, spændingstensoren $\underset{\sim}{\sigma}$, den relative temperaturdifferens θ, varmefylden c samt deres materielle afledede,
- et positivt arbejde på omverden kan kun udføres ved en formindskelse af den kinetiske energi, ikke ved en formindskelse af den indre energi,
- den specifikke indre energi u er en funktion af temperaturdifferensen θ alene.

Med den elastiske energiændring $\underset{\sim}{\sigma}^e : \underset{\sim}{d}^e$ og varmeproduktionen r^e hidrørende fra eksterne kilder lig nul, bliver (24.8)

$$\rho\dot{u} = \underset{\sim}{\sigma}^d : \underset{\sim}{d}^d - divq \tag{31.1}$$

hvor dissipationshastigheden $\underset{\sim}{\sigma}^d : \underset{\sim}{d}^d$ er lig med varmeproduktionen ρr^d

$$\underset{\sim}{\sigma}^d : \underset{\sim}{d}^d = \rho r^d > 0 \tag{31.2}$$

som er større end nul.

Benyttes nu (24.10), får man

$$\rho\dot{u} = \underset{\sim}{\sigma}^d : \underset{\sim}{d}^d - divq = \rho c\dot{\theta} \tag{31.3}$$

hvor c er en funktion af θ alene.

31.1 Viskose materialer

Materialer kaldes viskose, når spændingstensoren $\underset{\sim}{\sigma}$ afhænger af tøjningshastighedstensoren $\underset{\sim}{d}$. I henhold til afsnit 28.3 kan man udtrykke denne afhængighed på forskellige måder. Man kan f.eks. skrive

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{H}_0 : \underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{H}_1 : \underset{\sim}{d} + \underset{\sim}{H}_2 : \underset{\sim}{d}^2 \tag{31.4}$$

hvor fjerdeordens tensorerne $\underset{\sim}{H}_\nu$ varierer med ρ og θ alene, og i øvrigt indeholder strukturtensorerne $\underset{\sim}{\xi}_\gamma$.

Skrives som i afsnit 30.2

$$\underset{\sim}{H} = \underset{\sim}{U}^\kappa \underset{\sim}{V}_\kappa \tag{31.5}$$

hvor $\underset{\sim}{U}^{\kappa}$ og $\underset{\sim}{V}_{\kappa}$ er tensorer af anden orden, vil $\underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{d}^T$ og $\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{\sigma}^T$ medføre, at

$$\underset{\sim}{H} = \frac{1}{4}(\underset{\sim}{U}^{\kappa} + \underset{\sim}{U}^{\kappa T})(V_{\kappa} + V_{\kappa}^T) \tag{31.6}$$

Man kan derimod ikke skrive

$$\underset{\sim}{H} = \frac{1}{2}(\underset{\sim}{U}^{\kappa}\underset{\sim}{V}_{\kappa} + \underset{\sim}{V}_{\kappa}\underset{\sim}{U}^{\kappa}) \tag{31.7}$$

da en tøjningshastighedsenergifunktion ikke eksisterer.

Den omvendte relation til (31.4) er

$$\underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{B}_0 : \underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{B}_1 : \underset{\sim}{\sigma} + \underset{\sim}{B}_2 : \underset{\sim}{\sigma}^2 \tag{31.8}$$

Dissipationen $\underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{d}$ skal være ikke-negativ, hvilket medfører, at

$$\begin{aligned} d : \underset{\sim}{H}_0 : \underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{d} : \underset{\sim}{H}_1 : \underset{\sim}{d} + \underset{\sim}{d} : \underset{\sim}{H}_2 : \underset{\sim}{d}^2 &\geq 0 \\ \sigma : \underset{\sim}{B}_0 : \underset{\sim}{I} + \underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{B}_1 : \underset{\sim}{\sigma} + \underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{B}_2 : \underset{\sim}{\sigma}^2 &\geq 0 \end{aligned} \tag{31.9}$$

skal være opfyldt for alle $\underset{\sim}{d}$ og $\underset{\sim}{\sigma}$.

Eksempel 31.1

Rent viskose materialer betegnes væsker (eller gasser).

Sættes i (31.4)

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{H}_0 &= -\pi \underset{\sim}{I}\underset{\sim}{I}/3 \\ \underset{\sim}{H}_1 &= \underset{\sim}{H}_2 = \underset{\sim}{0} \end{aligned} \tag{a}$$

hvor *trykket* $\pi(\rho, \theta)$ er en funktion af massetætheden ρ og den relative temperaturdifferens θ, finder man

$$\underset{\sim}{\sigma} = -\pi \underset{\sim}{I} \tag{b}$$

som er den konstitutive ligning for en *friktionsløs* væske. Er der yderligere tale om et usammentrykkeligt materiale

$$\underset{\sim}{I}_d = \underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{d} = 0 \tag{c}$$

har man en *ideal* væske,

$$\underset{\sim}{\sigma} = -p\underset{\sim}{I} \tag{d}$$

hvor p i reaktionsspændingen er vilkårlig. Da dissipationshastigheden skal være større end eller lig med nul, dvs.

$$\underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{d} = -\pi I_{\underset{\sim}{d}} \geq 0 \tag{e}$$

ses, at kun for ideale væsker vil betingelsen være opfyldt for alle strømninger.

For sammentrykkelige væsker er kun strømninger, hvor trykket π og $I_{\underset{\sim}{d}}$ har modsat fortegn mulige.

Eksempel 31.2

Med

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{H}_0 &= -\pi \underset{\sim}{I}\underset{\sim}{I}/3 \\ \underset{\sim}{H}_1 &= \lambda \underset{\sim}{I}\underset{\sim}{I} + \mu(\underset{\sim}{J} + \underset{\sim}{T}) \\ \underset{\sim}{H}_2 &= \underset{\sim}{0} \end{aligned} \tag{a}$$

i (31.4), hvor λ og μ ligesom π er skalære funktioner af ρ og θ, har man den konstitutive ligning

$$\underset{\sim}{\sigma} = (-\pi + \lambda I_d)\underset{\sim}{I} + 2\mu\underset{\sim}{d} \tag{b}$$

for en isotrop *Newtonsk* væske.

Er væsken usammentrykkelig bliver

$$\underset{\sim}{\sigma} = -p\underset{\sim}{I} + 2\mu\underset{\sim}{d} \tag{c}$$

hvor p i reaktionsspændingen

$$\underset{\sim}{\sigma} = -p\underset{\sim}{I} \tag{d}$$

er vilkårlig, altså ikke en funktion af p, θ og I_d, og kun ekstraspændingen

$$\underset{\sim}{\sigma} = 2\mu\underset{\sim}{d} \tag{e}$$

afhænger af tøjningshastigheden.

Dissipationshastigheden bliver

$$\underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{d} = -\pi I_{\underset{\sim}{d}} + \lambda I^2_{\underset{\sim}{d}} + 2\mu I^2_{\underset{\sim}{d}} \tag{f}$$

Kravet om, at dissipationshastigheden skal være større end eller lig med nul lægger som i eksempel 31.1 bånd på de mulige strømninger for sammentrykkelige væsker, mens det for usammentrykkelige væsker fører til betingelsen

$$0 < \mu \tag{g}$$

Når også $\underset{\sim}{H}_2$ er forskellig fra nultensoren, og spændingen $\underset{\sim}{\sigma}$ afhænger af $\underset{\sim}{d}^2$, kaldes væsken ikke-Newtonsk.

31.2 Plastiske materialer

Til beskrivelse af plastiske materialer indføres som i afsnit 25.2.2 en flydefunktion, en flydelov og en hærdningsregel.

Flydefunktionen

$$f = f(\underset{\sim}{\sigma}, \underset{\sim}{\kappa}) \tag{31.10}$$

er en skalær funktion af spændingstensoren $\underset{\sim}{\sigma}$ og en hærdningsparameter $\underset{\sim}{\kappa}$, således at

$f < 0$ svarer til plastiske tøjningsinkrementer $d\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{0}$

$f = 0$ svarer til flydning, dvs. flydebetingelsen er opfyldt, mens

$f > 0$ ikke kan forekomme

Eksempel 31.3

Flydefunktioner er som nævnt skalære funktioner af spændingstensoren $\underset{\sim}{\sigma}$ og en hærdningsparameter $\underset{\sim}{\kappa}$. De i afsnit 28.1.2 behandlede funktioner kan således benyttes. Som et eksempel på en isotrop flydefunktion betragtes

$$f(\underset{\sim}{\sigma}) = a\underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{I}\underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{\sigma} + \frac{1}{2} b\underset{\sim}{\sigma} : (\underset{\sim}{J} + \underset{\sim}{T}) : \underset{\sim}{\sigma} + cI : \underset{\sim}{\sigma} - d = f_1(\sigma) - d \tag{a}$$

som med enakset trækstyrke T, enakset trykstyrke C og forskydningsstyrke S kan skrives

$$f = \left(\frac{1}{CT} - \frac{1}{2S^2}\right) \underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{I}\underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{\sigma} + \frac{1}{4S^2} \underset{\sim}{\sigma} : (\underset{\sim}{J} + \underset{\sim}{T}) : \underset{\sim}{\sigma} + \frac{C-T}{CT} \underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{\sigma} - 1 \tag{b}$$

Med $C = T$ og $S^2 = CT/3$ fås von Mises' flydebetingelse, mens $3S^2(C+T)^2 = 4C^2T^2$ fører til Drucker-Prager betingelsen.

Afhængigheden af hærdningsparameteren $\underset{\sim}{\kappa}$ kan indføres på flere måder. Ved *isotrop hærdning* erstattes d i (a) med κ^2, så man har

$$f = f_1(\underset{\sim}{\sigma}) - \kappa^2 \tag{c}$$

mens man ved *kinematisk hærdning* erstatter $\underset{\sim}{\sigma}$ med $\underset{\sim}{\sigma} - \underset{\sim}{\kappa}$, så man får

$$f = f_1(\underset{\sim}{\sigma} - \underset{\sim}{\kappa}) - 1 \tag{d}$$

hvor $\underset{\sim}{\kappa}$ i det ene tilfælde er en skalar og i det andet en tensor af anden orden.

Anisotrope flydefunktioner fås tilsvarende som

$$f = \alpha^\gamma \underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{\xi}_\gamma : \underset{\sim}{\sigma} + \beta^\gamma \underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{\xi}_\gamma : \underset{\sim}{\sigma} - 1 \tag{e}$$

hvor $\underset{\sim}{\xi}_\gamma$ er strukturtensorer, eksempelvis de 9 strukturtensorer i eksempel 30.4 for et ortotropt materiale.

I flydeloven udtrykkes de plastiske tøjningsinkrementer $d\underset{\sim}{\varepsilon}$ ved hjælp af det plastiske potentiale $g(\underset{\sim}{\sigma}, \underset{\sim}{\kappa})$, der ligesom flydefunktionen er en skalær funktion af $\underset{\sim}{\sigma}$ og $\underset{\sim}{\kappa}$. Af flydeloven

$$d\underset{\sim}{\varepsilon} = d\mu \partial g / \partial \underset{\sim}{\sigma} \quad , \quad f = 0 \tag{31.11}$$

hvor $d\mu$ er en skaleringsfaktor, og

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{d} &= D\underset{\sim}{\varepsilon}/d\alpha \\ \lambda &= d\mu/d\alpha \end{aligned} \tag{31.12}$$

hvor α er en monotont voksende evolutionsparameter, og hvor $\underset{\sim}{d}$ kaldes den plastiske tøjningsændring, fås flydeloven på formen

$$\underset{\sim}{d} = \lambda \partial g / \partial \underset{\sim}{\sigma} \quad , \quad f = 0 \tag{31.13}$$

Kravet om ikke-negativ dissipationshastighed bliver nu

$$\underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{d} = \lambda \underset{\sim}{\sigma} : \partial g / \partial \underset{\sim}{\sigma} \geq 0 \tag{31.14}$$

For materialer, hvor man kan bruge flydefunktionen som plastisk potentiale, $g = f$, kaldes

$$\underset{\sim}{d} = \lambda \partial f / \partial \underset{\sim}{\sigma} \tag{31.15}$$

den *associerede* flydelov eller, da $\partial f / \partial \underset{\sim}{\sigma}$ er normal til fladen $f = 0$ for fastholdt $\underset{\sim}{\kappa}$, *normalitetsbetingelsen.*

Eksempel 31.4

Ifølge flydeloven er den plastiske tøjningsændring udtrykt ved det plastiske potentiale som

$$\underset{\sim}{d} = \lambda \partial g / \partial \underset{\sim}{\sigma} \tag{a}$$

Med $g = f$ og f givet ved (b) i eksempel 31.3, har man

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{d} &= \lambda \left(2\Big(\frac{1}{CT} - \frac{1}{2S^2}\Big) \underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{\sigma} \underset{\sim}{I} + \frac{1}{S^2} \underset{\sim}{\sigma} + \frac{C-T}{CT} \underset{\sim}{I} \right) \\ &= \lambda \left(\frac{2I_\sigma + C - T}{CT} \underset{\sim}{I} - \frac{I_\sigma}{S^2} \underset{\sim}{I} + \frac{1}{S^2} \underset{\sim}{\sigma} \right) \end{aligned} \tag{b}$$

Da volumenændringshastigheden er første tøjningsændringsvariant, har man

$$\begin{aligned} &(dv - dV)/dV = I_d = \underset{\sim}{I} : \underset{\sim}{d} = \\ &\lambda(3(2I_\sigma + C - T)/CT - 2I_\sigma/S^2)) \end{aligned} \tag{c}$$

som for et Drucker-Prager materiale med $3S^2(C+T)^2 = 4C^2T^2$ bliver

$$I_d = 3\lambda(C-T)(2CT - I_\sigma(C-T))/2C^2T^2 \tag{d}$$

og for et von Mises materiale med $C = T$ og $S^2 = C^2/3$ bliver

$$I_d = 0 \tag{e}$$

Når det for en værdi af evolutionsparameteren α gælder, at flydebetingelsen $f = 0$ er opfyldt, er der tre muligheder, når α ændres til $\alpha + d\alpha$. Ved fortsat flydning gælder stadigvæk $f = 0$ og dermed *konsistensbetingelsen*

$$\frac{df}{d\alpha} = \frac{d\underset{\sim}{\sigma}}{d\alpha} : \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} + \frac{d\underset{\sim}{\kappa}}{d\alpha} o \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\kappa}} = 0 \tag{31.16}$$

Hvis både $d\underset{\sim}{\sigma}/d\alpha$ og $d\underset{\sim}{\kappa}/d\alpha$ er forskellige fra nul, taler man om *pålastning*, mens man, hvis hærdningsparameteren $\underset{\sim}{\kappa}$ ikke ændres, $d\underset{\sim}{\kappa}/d\alpha = \underset{\sim}{0}$, taler om *neutral* belastning. Den tredie mulighed er, at $df/d\alpha < 0$ hvorfor der til parameterværdien $\alpha + d\alpha$ svarer $f < 0$, og der er ikke længere flydning. Man taler her om aflastning.

Hærdningsreglen foreskriver, hvorledes hærdningsparameteren $\underset{\sim}{\kappa}$ afhænger af evolutionsparameteren α.

Eksempelt 31.5

Hærdningsparameteren $\underset{\sim}{\kappa}$ kan afhænge af α indirekte ved f.eks. at være en funktion af den plastiske tøjning $\underset{\sim}{\varepsilon}$. Er dette tilfældet, bliver

$$\frac{d\underset{\sim}{\kappa}}{d\alpha} = \frac{d\underset{\sim}{\varepsilon}}{d\alpha} : \frac{d\underset{\sim}{\kappa}}{d\underset{\sim}{\varepsilon}} = \lambda \frac{\partial g}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} : \frac{d\underset{\sim}{\kappa}}{d\underset{\sim}{\varepsilon}} \tag{a}$$

Med

$$\begin{aligned} l &= \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} : \frac{\partial \underset{\sim}{\sigma}}{\partial \alpha} \\ h &= \frac{\partial g}{\partial \underset{\sim}{\sigma}} : \frac{d\underset{\sim}{\kappa}}{d\underset{\sim}{\varepsilon}} o \frac{\partial f}{\partial \underset{\sim}{\kappa}} \end{aligned} \tag{b}$$

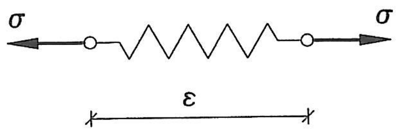
kan konsistensbetingelsen nu skrives

$$l - \lambda h = 0 \tag{c}$$

hvoraf skaleringsfaktoren λ kan bestemmes.

32. LINEÆRE, VISKOELASTISKE MODELLER

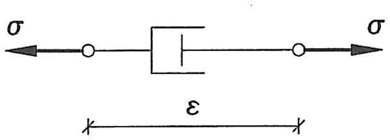
Viskoelastiske materialer skal her modelleres som sammensat af elastiske elementer symboliseret ved fjedre, som vist i figur 32.1 og med konstitutive ligninger



Figur 32.1

$$
\begin{aligned}
\underset{\sim}{\sigma} &= \underset{\sim}{C} : \underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{\varepsilon} : \underset{\sim}{C} \\
\underset{\sim}{\varepsilon} &= \underset{\sim}{S} : \underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{S}
\end{aligned} \tag{32.1}
$$

og viskose elementer symboliseret ved dæmpere, som vist i figur 32.2



Figur 32.2

og med konstitutive ligninger

$$
\begin{aligned}
\underset{\sim}{\sigma} &= \underset{\sim}{H} : \underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{d} : \underset{\sim}{H} \\
\underset{\sim}{d} &= \underset{\sim}{B} : \underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{B}
\end{aligned} \tag{32.2}
$$

I fjedrene er den elastiske energiændringshastighed

$$
\begin{aligned}
\underset{\sim}{\sigma}^e : \underset{\sim}{d}^e &= \underset{\sim}{\sigma}^e : \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^e \\
&= \underset{\sim}{\sigma}^e : \underset{\sim}{S} : \dot{\underset{\sim}{\sigma}}^e \\
&= \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^e : \underset{\sim}{C} : \underset{\sim}{\varepsilon}^e
\end{aligned} \tag{32.3}
$$

og i dæmperne er dissipationshastigheden

$$
\begin{aligned}
\underset{\sim}{\sigma}^d : \underset{\sim}{d}^d &= \underset{\sim}{\sigma}^d : \underset{\sim}{B} : \underset{\sim}{\sigma}^d \\
&= \underset{\sim}{d}^d : \underset{\sim}{H} : \underset{\sim}{d}^d
\end{aligned} \tag{32.4}
$$

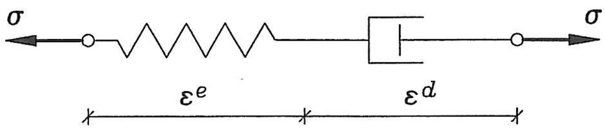
Den konstitutive ligning for det sammensatte materiale findes nu ved at udtrykke de indre kræfters effekt som summen af de elastiske energi-ændringshastigheder og dissipationshastighederne, se (16.24)

$$\underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{d} = \sum \underset{\sim}{\sigma}^e : \underset{\sim}{d}^e + \sum \underset{\sim}{\sigma}^d : d^d \tag{32.5}$$

hvor $\underset{\sim}{\sigma}$ er den totale spænding, og $\underset{\sim}{d}$ er den totale tøjningshastighed.

Eksempel 32.1

I den symbolske model af et Maxwell-materiale, se figur 32.3, er en fjeder anbragt i



Figur 32.3

serie med en dæmper. Idet

$$\underset{\sim}{\sigma}^e = \underset{\sim}{\sigma}^d = \underset{\sim}{\sigma} \tag{a}$$

og $$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{\varepsilon}^e + \underset{\sim}{\varepsilon}^d \tag{b}$$

dvs. $$\underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{d}^e + \underset{\sim}{d}^d \tag{c}$$

får man

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\sigma}^e : \underset{\sim}{d}^e &= \underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{S} : \underset{\sim}{\dot{\sigma}} \\ &= \underset{\sim}{\sigma} : (\underset{\sim}{d} - \underset{\sim}{d}^d) = \underset{\sim}{\sigma} : (\underset{\sim}{d} - \underset{\sim}{B} : \underset{\sim}{\sigma}) \end{aligned} \tag{d}$$

og

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\sigma}^d : \underset{\sim}{d}^d &= \underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{B} : \underset{\sim}{\sigma} \\ &= \underset{\sim}{\sigma} : (\underset{\sim}{d} - \underset{\sim}{d}^e) = \underset{\sim}{\sigma} : (\underset{\sim}{d} - \underset{\sim}{S} : \underset{\sim}{\dot{\sigma}}) \end{aligned} \tag{e}$$

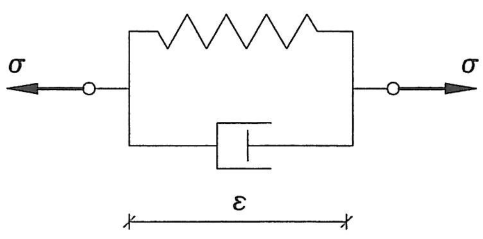
Ved indsættelse i (32.5) får man den konstitutive ligning

$$\underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{S} : \underset{\sim}{\dot{\sigma}} + \underset{\sim}{B} : \underset{\sim}{\sigma}$$

At dissipationshastigheden skal være større end nul medfører, at $\underset{\sim}{B}$ skal være positiv definit.

Eksempel 32.2

I den symbolske model af et Kelvin-Voigt materiale, se figur 32.4, er en fjeder anbragt



Figur 32.4

parallelt med en dæmper. Idet

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{\sigma}^e + \underset{\sim}{\sigma}^d \tag{a}$$

og $$\underset{\sim}{\varepsilon}^e = \underset{\sim}{\varepsilon}^d = \underset{\sim}{\varepsilon} \tag{b}$$

dvs. $$\underset{\sim}{d}^e = \underset{\sim}{d}^d = \underset{\sim}{d} \tag{c}$$

får man

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\sigma}^e : \underset{\sim}{d}^e &= \underset{\sim}{\sigma}^e : \underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{\varepsilon} : \underset{\sim}{C} : \underset{\sim}{d} \\ &= (\underset{\sim}{\sigma} - \underset{\sim}{\sigma}^d) : \underset{\sim}{d} = (\underset{\sim}{\sigma} - \underset{\sim}{d} : \underset{\sim}{H}) : \underset{\sim}{d} \end{aligned} \tag{d}$$

og

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\sigma}^d : \underset{\sim}{d}^d &= \underset{\sim}{\sigma}^d : \underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{d} : \underset{\sim}{H} : \underset{\sim}{d} = \\ &= (\underset{\sim}{\sigma} - \underset{\sim}{\sigma}^e) : \underset{\sim}{d} = (\underset{\sim}{\sigma} - \underset{\sim}{\varepsilon} : -\underset{\sim}{C}) : \underset{\sim}{d} \end{aligned} \tag{e}$$

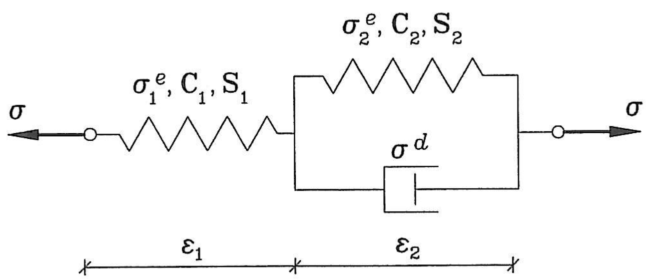
Med (d), (e) og (32.5) fås den konstitutive ligning

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{C} : \underset{\sim}{\varepsilon} + \underset{\sim}{H} : \underset{\sim}{d} \tag{f}$$

Da dissipationshastigheden skal være større end nul, skal $\underset{\sim}{H}$ være positiv definit.

Eksempel 32.3

Den symbolske model af et Poynting-Thomson materiale er vist i figur 32.5



Figur 32.5

Med figurens betegnelser har man

$$\underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{\sigma}_1^e = \underset{\sim}{\sigma}_2^e + \underset{\sim}{\sigma}^d \tag{a}$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{\varepsilon}_1 + \underset{\sim}{\varepsilon}_2 \tag{b}$$

$$\underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{d}_1 + \underset{\sim}{d}_2 \tag{c}$$

og dermed

$$\begin{aligned} \sum \underset{\sim}{\sigma}^e : \underset{\sim}{d}^e &= \underset{\sim}{\sigma}_1^e : \underset{\sim}{d}_1 + \underset{\sim}{\sigma}_2^e : \underset{\sim}{d}_2 \\ &= \underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{S}_1 : \dot{\underset{\sim}{\sigma}} + (\underset{\sim}{\varepsilon} - \underset{\sim}{S}_1 : \underset{\sim}{\sigma}) : \underset{\sim}{C}_2 : (\underset{\sim}{d} - \underset{\sim}{S}_1 : \dot{\underset{\sim}{\sigma}}) \end{aligned} \tag{d}$$

samt

$$\underset{\sim}{\sigma}^d : \underset{\sim}{d}^d = (\underset{\sim}{d} - \underset{\sim}{S}_1 : \dot{\underset{\sim}{\sigma}}) : \underset{\sim}{H} : (\underset{\sim}{d} - \underset{\sim}{S}_1 : \dot{\underset{\sim}{\sigma}}) \tag{e}$$

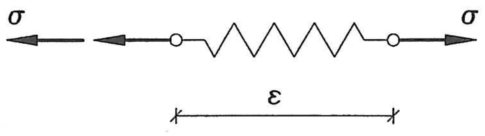
Af (d), (e) og (32.5) fås den konstitutive ligning

$$\dot{\underset{\sim}{\sigma}} : \underset{\sim}{H} + (\underset{\sim}{C}_1 + \underset{\sim}{C}_2) : \underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{C}_1 : \underset{\sim}{C}_2 : \underset{\sim}{\varepsilon} + \underset{\sim}{d} : \underset{\sim}{H} \tag{f}$$

Også i dette eksempel er betingelsen for ikke-negativ dissipationshastighed, at $\underset{\sim}{H}$ er positiv definit.

33. ELASTOPLASTISKE MODELLER

Elastoplastiske materialer er sammensat af elastiske elementer og plastiske elementer.

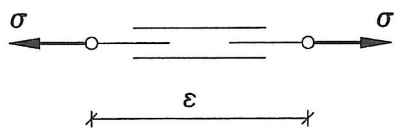


Figur 33.1

Elastiske elementer symboliseres ved fjedre, som vist i figur 33.1 med konstitutive ligninger

$$
\begin{aligned}
\underset{\sim}{\sigma} &= \underset{\sim}{C} : \underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{\varepsilon} : \underset{\sim}{C} \\
\underset{\sim}{\varepsilon} &= \underset{\sim}{S} : \underset{\sim}{\sigma} = \underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{S}
\end{aligned}
\tag{33.1}
$$

Plastiske elementer symboliseres ved friktionselementer som vist i figur 33.2 og



Figur 33.2

karakteriseres ved

$$
\begin{aligned}
&\text{flydefunktionen } f(\underset{\sim}{\sigma}, \underset{\sim}{\kappa}) \\
&\text{det plastiske potentiale } g(\underset{\sim}{\sigma}, \underset{\sim}{\kappa}) \\
&\text{hærdningsparameteren } \underset{\sim}{\kappa}(\underset{\sim}{\varepsilon}^{d})
\end{aligned}
\tag{33.2}
$$

Den elastiske energiændringshastighed i fjedrene er

$$
\begin{aligned}
\underset{\sim}{\sigma}^{e} : \underset{\sim}{d}^{e} &= \underset{\sim}{\sigma}^{e} : \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^{e} \\
&= \underset{\sim}{\sigma}^{e} : \underset{\sim}{S} : \dot{\underset{\sim}{\sigma}}^{e} \\
&= \underset{\sim}{\varepsilon}^{e} : \underset{\sim}{C} : \dot{\underset{\sim}{\varepsilon}}^{e}
\end{aligned}
\tag{33.3}
$$

og i friktionselementerne er dissipationshastigheden

$$\underset{\sim}{\sigma}^d : \underset{\sim}{d}^d = \lambda \underset{\sim}{\sigma} : \partial g / \partial \underset{\sim}{\sigma} \tag{33.4}$$

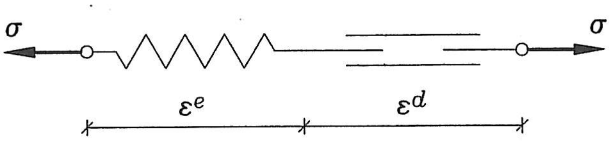
Konstitutive ligninger for sammensatte materialer findes nu ved at udtrykke de indre kræfters effekt som summen af de elastiske energiændringshastigheder og dissipationshastighederne, se (16.24)

$$\underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{d} = \sum \underset{\sim}{\sigma}^e : \underset{\sim}{d}^e + \sum \underset{\sim}{\sigma}^d : \underset{\sim}{d}^d \tag{33.5}$$

hvor $\underset{\sim}{\sigma}$ er den totale spænding og $\underset{\sim}{d}$ er den totale tøjningshastighed.

Eksempel 33.1

Anbringes i den symbolske model af et elastoplastisk materiale en fjeder i serie med et friktionselement, se figur 33.3, har man



Figur 33.3

$$\underset{\sim}{\sigma}^e = \underset{\sim}{\sigma}^d = \underset{\sim}{\sigma} \tag{a}$$

$$\underset{\sim}{\varepsilon} = \underset{\sim}{\varepsilon}^e + \underset{\sim}{\varepsilon}^d \tag{b}$$

$$\underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{d}^e + \underset{\sim}{\varepsilon}^d \tag{c}$$

og dermed

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\sigma}^e : \underset{\sim}{d}^e &= \underset{\sim}{\sigma} : \underset{\sim}{S} : \dot{\underset{\sim}{\sigma}} \\ &= \underset{\sim}{\sigma} : (\underset{\sim}{d} - \lambda \partial g / \partial \underset{\sim}{\sigma}) \end{aligned} \tag{d}$$

$$\begin{aligned} \underset{\sim}{\sigma}^d : \underset{\sim}{d}^d &= \underset{\sim}{\sigma} : \lambda \partial g / \partial \underset{\sim}{\sigma} \\ &= \underset{\sim}{\sigma} : (\underset{\sim}{d} - \underset{\sim}{S} : \dot{\underset{\sim}{\sigma}}) \end{aligned} \tag{e}$$

Indsættes (d) og (e) i (33.5) får man

$$\underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{S} : \dot{\sigma} + \lambda \partial g / \partial \underset{\sim}{\sigma} \tag{f}$$

Skaleringsfaktoren λ bestemmes af konsistensbetingelsen (31.16)

$$df/d\alpha = (d\underset{\sim}{\sigma}/d\alpha) : (\partial f/\partial \underset{\sim}{\sigma}) + (d\underset{\sim}{\kappa}/d\alpha) \circ (\partial f/\partial \underset{\sim}{\kappa}) = 0 \tag{g}$$

som med $\underset{\sim}{\kappa} = \underset{\sim}{\kappa}(\underset{\sim}{\varepsilon}^d)$ og $d\underset{\sim}{\sigma}/d\alpha = \dot{\underset{\sim}{\sigma}}$ bliver

$$\dot{\underset{\sim}{\sigma}} : \partial f/\partial \underset{\sim}{\sigma} + \lambda(\partial g/\partial \underset{\sim}{\sigma}) : (d\underset{\sim}{\kappa}/d\underset{\sim}{\varepsilon}^d) \circ (\partial f/\partial \underset{\sim}{\kappa}) = 0 \tag{h}$$

Med

$$h = -(\partial g/\partial \underset{\sim}{\sigma}) : (d\underset{\sim}{\kappa}/d\underset{\sim}{\varepsilon}^d) \circ (\partial f/\partial \underset{\sim}{\kappa}) \tag{i}$$

får man

$$\lambda_1 = (\partial f/\partial \underset{\sim}{\sigma}) : \dot{\sigma}/h \tag{j}$$

og dermed

$$\underset{\sim}{d} = (\underset{\sim}{S} + (\partial g/\partial \underset{\sim}{\sigma})(\partial f/\partial \underset{\sim}{\sigma})/h) : \dot{\sigma} \tag{k}$$

som med den elastoplastiske fleksibilitetstensor $\underset{\sim}{S}^{ep}$ lig med størrelsen i parentesen i (k) kan skrives

$$\underset{\sim}{d} = \underset{\sim}{S}^{ep} : \dot{\underset{\sim}{\sigma}} \tag{l}$$

Kun for $h \neq 0$ kan den elstoplastiske fleksibilitetstensor bestemmes. I udtrykket (i) for h indgår $\underset{\sim}{\varepsilon}^d = \underset{\sim}{\varepsilon} - \underset{\sim}{\varepsilon}^e = \underset{\sim}{\varepsilon} - \underset{\sim}{S} : \underset{\sim}{\sigma}$.

En fremgangsmåde, som kan benyttes selvom $h = 0$, skal skitseres. Indsættes (i) og

$$\dot{\underset{\sim}{\sigma}} = \underset{\sim}{C} : (\underset{\sim}{d} - \lambda \partial g/\partial \underset{\sim}{\sigma}) \tag{m}$$

i konsistensbetingelsen (h) har man

$$(\partial f/\partial \underset{\sim}{\sigma}) : \underset{\sim}{C} : \underset{\sim}{d} - \lambda((\partial f/\partial \underset{\sim}{\sigma}) : \underset{\sim}{C} : (\partial g/\partial \underset{\sim}{\sigma}) + h) = 0 \tag{n}$$

og dermed

$$\lambda_2 = \frac{(\partial f/\partial \underset{\sim}{\sigma}) : \underset{\sim}{C} : \underset{\sim}{d}}{h + (\partial f/\partial \underset{\sim}{\sigma}) : \underset{\sim}{C} : (\partial g/\partial \underset{\sim}{\sigma})} \tag{o}$$

Indsættes λ_2 i (m) fås

$$\dot{\underset{\sim}{\sigma}} = \left(\underset{\sim}{C} - \frac{1}{H}\underset{\sim}{C} : (\partial g/\partial \underset{\sim}{\sigma})(\partial f/\partial \underset{\sim}{\sigma}) : \underset{\sim}{C}\right) : \underset{\sim}{d} \tag{p}$$

hvor

$$H = h + (\partial f/\partial \underset{\sim}{\sigma}) : \underset{\sim}{C} : (\partial g/\partial \underset{\sim}{\sigma}) \tag{q}$$

Med den elastoplastiske stivhedstensor $\underset{\sim}{C}^{ep}$ lig med størrelsen i parentesen i (p) har man

$$\dot{\underset{\sim}{\sigma}} = \underset{\sim}{C}^{ep} : \underset{\sim}{d} \tag{r}$$

De konstitutive ligninger (l) og (r) gælder så længe, der er fortsat flydning i friktionselementet, dvs. $f = 0$.

Når man har $f < 0$ er

$$\left.\begin{aligned} \underset{\sim}{d} &= \underset{\sim}{S} : \dot{\sigma} \\ \dot{\sigma} &= \underset{\sim}{C} : d \end{aligned}\right. \tag{s}$$

Dissipationshastigheden bestemt ved (e) og λ bestemt ved (j) eller (o) skal være større end nul.

Kontinuum

ISSN 1395-7953 R0031
Instituttet for Bygningsteknik
Aalborg Universitet, December 2000
Sohngaardsholmsvej 57, 9000 Aalborg
Tlf.: 9635 8080 Fax: 9814 8243
http://www.civil.auc.dk/i6